

Title	マッシュー群に関連した擬テータ関数に現れる合同式 (有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究)
Author(s)	三枝崎, 剛
Citation	数理解析研究所講究録 (2014), 1872: 1-7
Issue Date	2014-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/195498
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

マシュー群に関連した擬テータ関数に現れる合同式 Congruences on the Fourier coefficients of the Mathieu mock theta function

山形大学・地域教育文化学部 三枝崎 剛

Tsuyoshi Miezaki

Faculty of Education, Art and Science

Yamagata University

1 はじめに

本稿の目的は、近年発見された Mathieu Moonshine 現象 [7], Umbral Moonshine 現象 [2] に現れるモックテータ関数のフーリエ係数の合同式を紹介することである。その合同式の Cheng–Duncan–Harvey による予想 [2] への応用も紹介したい。

本稿の結果は、部分的に Matthias Waldherr 氏 (University of Cologne), Thomas Creutzig 氏 (Technische Universität Darmstadt), Gerald Höhn 氏 (Kansas State University) との共同研究である。

2 Moonshine 現象

$E_4(\tau)$ を Eisenstein 級数, $\eta(\tau)$ を Dedekind η -関数とする：

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n,$$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n),$$

ここで, $\sigma_3(n) = \sum_{m|n} m^3$. そのとき, j -関数は次のように定義される：

$$\begin{aligned} j(\tau) &= \frac{E_4(\tau)^3}{\eta(\tau)^{24}} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} c(n) q^n. \end{aligned}$$

McKay は, $c(1) = 196884$ が Monster 単純群の非自明な既約表現の最小次元 196883 とほとんど等しい事に気付き, いわゆる Moonshine 現象を発見した. これらは, Conway と Norton により, Moonshine conjecture として纏められ, 現在では Borchers によって証

明されている [5, 1]. この様に j -関数の Fourier 係数 $c(n)$ は種々の興味深い性質をもつが、特に次の合同式を満たす事が知られている [14]: $a \geq 1$ に対し、

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{2^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{2^{3a+8}} \\ n \equiv 0 \pmod{3^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{3^{2a+3}} \\ n \equiv 0 \pmod{5^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{5^{a+1}} \\ n \equiv 0 \pmod{7^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{7^a} \\ n \equiv 0 \pmod{11^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{11^a}. \end{cases}$$

3 Mathieu Moonshine 現象

さて最近, Mathieu moonshine 現象が発見された [7]. $\vartheta_1(z; \tau)$ と $\mu(z; \tau)$ を次に定める関数とする:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z; \tau) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (n + \frac{1}{2})^2 + 2\pi i (n + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}, \\ \mu(z; \tau) &= \frac{ie^{\pi iz}}{\vartheta_1(z; \tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)e^{2\pi iz}}}{1 - q^n e^{2\pi iz}}. \end{aligned}$$

それらを用いて $\Sigma(\tau)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \Sigma(\tau) &:= 8 \sum_{z \in \{1/2, \tau/2, (1+\tau)/2\}} \mu(z; \tau) \\ &= q^{-\frac{1}{8}} \left(2 - \sum_{n=1}^{\infty} A(n) q^n \right) \text{ (say)} \\ &= -q^{-\frac{1}{8}} (-2 + 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + \cdots). \end{aligned}$$

Mathieu moonshine 現象とは最初の 5 個のフーリエ係数を 2 で割ったもの:

$$\{45, 231, 770, 2277, 5796\},$$

が 24 次の Mathieu 群 M_{24} の既約表現の次元に等しく, 更に他の係数も M_{24} の既約表現の次元の正の整数係数線形結合で書けている, というものであった. このミステリアスな現象の理由は, ごく最近になって, [9] によって解明された.

さて, このフーリエ係数の合同式を調べようということが目的である. 筆者は, j -関数の様な合同式を持たないか調べる中で, j -関数の類似とも思える, 次の合同式を発見した:

$$\begin{cases} n \equiv 1, 2 \pmod{3} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1, 3 \pmod{5} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{5} \\ n \equiv 2, 3, 5 \pmod{7} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{7} \\ n \equiv 2, 3, 4, 6, 9 \pmod{11} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{11} \\ n \equiv 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 15, 16, 19, 21 \pmod{23} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{23}. \end{cases} \quad (1)$$

モジュラー形式のフーリエ係数の合同式を示すには, スツルムの定理という強力な道具がある. スツルムの定理は, 最初の有限項のみ合同式を確認すれば, 全てのフーリエ係数で

正しいことがわかることを主張する。しかし、 $\Sigma(\tau)$ はもはやモジュラー形式でなく、モックテータ関数である。つまりスツルムの定理を用いることが出来ない。筆者は、Matthias Waldherr 氏との共同研究において、スツルムの定理をモックテータ関数へ拡張し、これらの合同式を示した：

定理 3.1 ([10],[12]). (1) の合同式は正しい。

面白いことに、法として現れる素数は、 $\sharp M_{24}$ を割る奇素数として特徴づけられる。偶素数 2 に関する合同式については後述べる。

4 Mathieu Moonshine 現象の McKay–Thompson 級数

さて、トレースが $\Sigma(\tau)$ となる M_{24} -加群 $K = \bigoplus_{n=-1}^{\infty} K_n$ に対し、 M_{24} の共役類 ℓX の元 g の McKay–Thompson 級数を定義しよう [6, 8]：

$$\Sigma_{\ell X}(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} \text{tr}(g|K_n) q^{n/8} = \sum_{n=-1}^{\infty} A_{\ell X}(n) q^{n/8} \text{ (say).}$$

このとき [11] において、 $A_{\ell X}(n)$ も (1) と同じ型の合同式を持つことが示された。2 つの type に分けているが、大雑把にいて “Type I” がモックテータ関数, “Type II” がモジュラー関数である：

定理 4.1. $g \in M_{24}$ に対し $A_g(n)$ は次の合同式を持つ：

- Type I:

1A

$$n \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } 3) \\ 1, 3 & (\text{mod } 5) \\ 2, 3, 5 & (\text{mod } 7) \\ 2, 3, 4, 6, 9 & (\text{mod } 11) \\ \begin{cases} 4, 5, 6, 7, 9, \\ 11, 12, 15, 16, 19, 21 \end{cases} & (\text{mod } 23) \end{cases} \Rightarrow A_{1A}(n) \equiv 0 \begin{cases} (\text{mod } 3^2) \\ (\text{mod } 5) \\ (\text{mod } 7) \\ (\text{mod } 11) \\ (\text{mod } 23). \end{cases}$$

2A

$$n \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } 3) \\ 2, 3, 5 & (\text{mod } 7) \end{cases} \Rightarrow A_{2A}(n) \equiv 0 \begin{cases} (\text{mod } 3) \\ (\text{mod } 7) \end{cases}$$

3A

$$n \equiv \begin{cases} 1, 2 & (\text{mod } 3) \\ 1, 3 & (\text{mod } 5) \end{cases} \Rightarrow A_{3A}(n) \equiv 0 \begin{cases} (\text{mod } 3) \\ (\text{mod } 5) \end{cases}$$

5A

$$n \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } 3) \\ 1, 3 & (\text{mod } 5) \end{cases} \Rightarrow A_{5A}(n) \equiv 0 \begin{cases} & (\text{mod } 3) \\ & (\text{mod } 5) \end{cases}$$

7A

$$n \equiv \begin{cases} 2 & (\text{mod } 3) \\ 2, 3, 5 & (\text{mod } 7) \end{cases} \Rightarrow A_{7A}(n) \equiv 0 \begin{cases} & (\text{mod } 3) \\ & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

6A

$$n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A_{6A}(n) \equiv 0 \pmod{3}$$

11A

$$n \equiv 2, 3, 4, 6, 9 \pmod{11} \Rightarrow A_{11A}(n) \equiv 0 \pmod{11}$$

14A

$$n \equiv 2, 3, 5 \pmod{7} \Rightarrow A_{14A}(n) \equiv 0 \pmod{7}$$

15A

$$n \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } 3) \\ 1, 3 & (\text{mod } 5) \end{cases} \Rightarrow A_{15A}(n) \equiv 0 \begin{cases} & (\text{mod } 3) \\ & (\text{mod } 5) \end{cases}$$

23A

$$n \equiv \begin{cases} 4, 5, 6, 7, 9, \\ 11, 12, 15, 16, 19, 21 \end{cases} \pmod{23} \Rightarrow A_{23A}(n) \equiv 0 \pmod{23}$$

• Type II:**2B**

$$n \equiv \begin{cases} 2 & (\text{mod } 3) \\ 1, 3 & (\text{mod } 5) \end{cases} \Rightarrow A_{2B}(n) \equiv 0 \begin{cases} & (\text{mod } 3) \\ & (\text{mod } 5) \end{cases}$$

4A

$$n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A_{4A}(n) \equiv 0 \pmod{3}$$

4C

$$n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A_{4C}(n) \equiv 0 \pmod{3}$$

3B

$$n \equiv \begin{cases} 1, 2 \pmod{3} \\ 2, 3, 5 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow A_{3B}(n) \equiv 0 \begin{cases} \pmod{3} \\ \pmod{7} \end{cases}$$

6B

$$n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow A_{6B}(n) \equiv 0 \pmod{3}$$

12B

$$n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow A_{12B}(n) \equiv 0 \pmod{3}$$

10A

$$n \equiv 1, 3 \pmod{5} \Rightarrow A_{10A}(n) \equiv 0 \pmod{5}$$

12A

$$n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A_{12A}(n) \equiv 0 \pmod{3}$$

21A

$$n \equiv \begin{cases} 2 \pmod{3} \\ 2, 3, 5 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow A_{21A}(n) \equiv 0 \begin{cases} \pmod{3} \\ \pmod{7} \end{cases}$$

$A(n)(= A_{1A}(n))$ と同じく、法として現れる素数は、 $\#C_{M_{24}}(\ell X)$ を割る奇素数として特徴づけられる [11]. 更に他の奇素数に関しては、(1) のような合同式は持たないと予想される. この予想を解決することは、モックテータ関数と M_{24} との関係を更に明らかにするという意味において、大切な問題であると考ええる.

5 フーリエ係数の偶奇性

では最後に、Fourier 係数の偶奇を調べたい. 以下では、記号は [3] に従う. 実は [10, 11, 12] において、偶奇は詳しく調べなかった. というのは、全ての ℓX に対し $2 \mid \#C_{M_{24}}(\ell X)$ であり、すると上に挙げた特徴づけを信じるならば、全ての ℓX に対し、 $A_{\ell X}(n)$ の偶奇は規則的なはずである. 確かに計算してみると、ほぼ全ての $A_{\ell X}(n)$ は偶数だが、しかし奇数も一部の ℓX に対し存在し、なかなか良い特徴づけが見つからなかったからである. ところが、[2] において提出された一つの予想と思わぬ関係が見つかり、それにより Fourier 係数の偶奇の特徴づけも成功したので報告する. その予想とは、次のようなものである:

予想 5.1 ([2], Conj. 5.11). $n = \ell m^2 \equiv 7 \pmod{8}$ とする. K_n は次の複素共役な既約表現のペアを含む:

- For $\ell = 7$, one of the pairs (χ_3, χ_4) , (χ_{12}, χ_{13}) or (χ_{15}, χ_{16}) ;
- for $\ell = 15$, the pair (χ_5, χ_6) ;
- for $\ell = 23$, the pair (χ_{10}, χ_{11}) .

この予想に現れる数 “7, 15, 23” が, 偶奇の特徴づけに必要なものである. $A_{\ell X}(n)$ に関する偶奇性は, 次のように述べられる:

定理 5.1 ([4]). M_{24} の共役類 ℓX に対し, $A_{\ell X}(n)$ が奇数である必要十分条件は, $\ell X \in \{7A, 7B, 14A, 14B, 15A, 15B, 23A, 23B\}$ かつ奇数 m を用いて, $n = \ell m^2$ と書ける, もしくは, $\ell X \in \{21A, 21B\}$ かつ 3 で割れない奇数 m を用いて, $n = \ell m^2$ と書けることである.

定理 5.1 を用いて, 予想 5.1 を含むような次の系が得られた:

系 5.1 ([4]). $n = \ell m^2 \equiv 7 \pmod{8}$ とする. $n = \ell m^2 \equiv 7 \pmod{8}$ とする. K_n は次の複素共役な既約表現のペアを重複度奇数で含む:

- For $\ell = 7$, the total number of pairs (χ_3, χ_4) and (χ_{12}, χ_{13}) ;
- for $\ell = 7$ and m divisible by 3, the pair (χ_{15}, χ_{16}) ;
- for $\ell = 15$, the pair (χ_5, χ_6) ;
- for $\ell = 23$, the pair (χ_{10}, χ_{11}) .

6 Remarks

- [2] により, Umbral Moonshine 現象が見つかった. この現象に現れるモックテータ関数に対しても数多くの興味ある合同式を発見している. 特に, ラマヌジャンの発見した多数のモックテータ関数が登場し, それらのフーリエ係数の合同式に現れる法が, 対応する群の位数と関係することも確認している. 古典的なラマヌジャンのモックテータ関数が, 由緒正しい有限群達と関係することが明らかになったのである. これについて, 論文を作成中である.

- 証明について触れなかったが, 簡単に述べておく. 既に述べたように, 保型形式のフーリエ係数の合同式を示す際, スツルムの定理 [13] を用いることは定石である. しかし, 我々の考えている McKay–Thompson 級数は一般に保型形式でなくモックテータ関数なので, スツルムの定理が使えない. 我々は, スツルムの定理をモックテータ関数に一般化することに成功した. それを用いてこれら数多くの合同式の証明に成功した.

また, モックテータ関数となる McKay–Thompson 級数を, モジュラー形式や良く知られた形式の和として表示できる場合が, 少なからずある. このような場合は, 通常はスツルムの定理を使えばよい.

詳しくは論文を参照して頂きたい [10, 12, 2].

参考文献

- [1] R.E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), no. 2, 405–444.
- [2] M. C. N. Cheng, J. F. R. Duncan and J. A. Harvey, Umbral Moonshine, preprint (2012), arXiv:1204.2779.
- [3] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Oxford University Press, 1985.
- [4] T. Creutzig, G. Höhn and T. Miezeki, The McKay-Thompson series of Mathieu Moonshine modulo two, submitted (2012), arXiv:1211.3703.
- [5] J. H. Conway and S. P. Norton, Monstrous Moonshine, *Bull. Lond. Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.
- [6] T. Eguchi and K. Hikami, Note on twisted elliptic genus of $K3$ surface, *Phys. Lett. B* **694** (2011), no. 4-5, 446–455, arXiv:1008.4924.
- [7] T. Eguchi, H. Ooguri and Y. Tachikawa, Notes on the $K3$ surface and the Mathieu group M_{24} , *Exp. Math.* **20** (2011), no. 1, 91–96, arXiv:1004.0956.
- [8] M. R. Gaberdiel, S. Hohenegger and R. Volpato, Mathieu Moonshine in the elliptic genus of $K3$, *J. High Energy Phys.* (2010), no. 10, **062**, 24 pp, arXiv:1008.3778.
- [9] T. Gannon, Much ado about Mathieu, preprint (2012), arXiv:1211.5531.
- [10] T. Miezeki, On the Mathieu mock theta function, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **88** (2012), no. 2, 28–30.
- [11] T. Miezeki, Congruences on the Fourier coefficients for mock theta functions, which relate finite groups, preprint.
- [12] T. Miezeki, M. Waldherr, Congruence of the Fourier coefficients of the Mathieu mock theta function, submitted.
- [13] K. Ono, *The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q -series*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 102, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2004.
- [14] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Translated from the French. Graduate Texts in Mathematics, No. 7. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.